Information zur dynamische Simulation

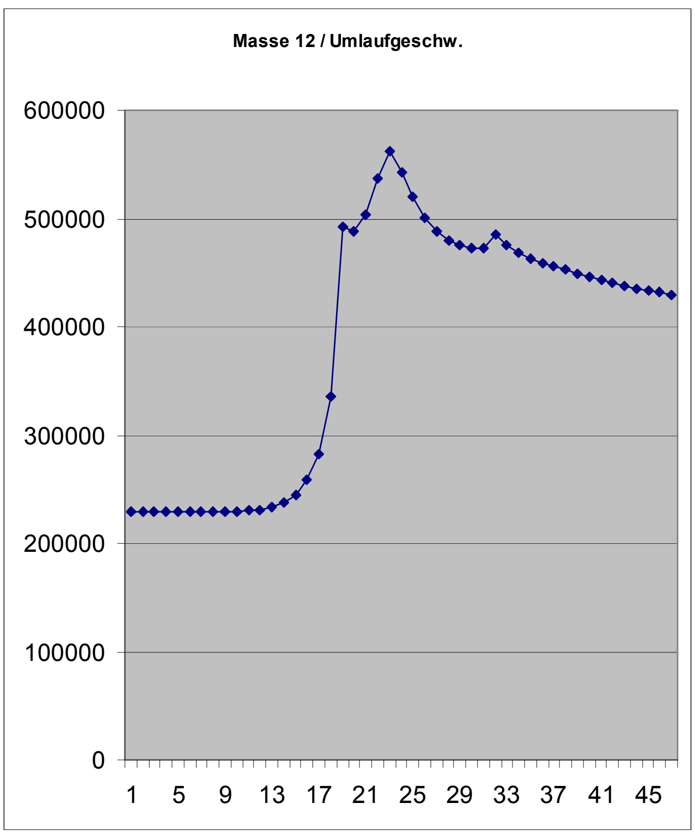
ausgearbeitet von: Dipl. Ing. Matthias Krause Kirchzarten, den 13.10.2006 (letzte Änderung 22.10.2006)

Was kann das dynamische Massenrotationsmodel?

Das dynamische Modell ist so aufgebaut, dass die Bewegungen nur so zugelassen werden, wie bei einer unendlich großen Anzahl von Masseteilchen, die konzentrisch angeordnet sind. (Nur für diese drei vorgegebenen Massenverteilungen stimmen die Umlaufgeschwindigkeiten also genau. Stets wird im Modell, von einer Kreisbahn bei der Umlaufbewegung ausgegangen, die zwingend auf das Zentrum der Massefläche bezogen bleibt.)

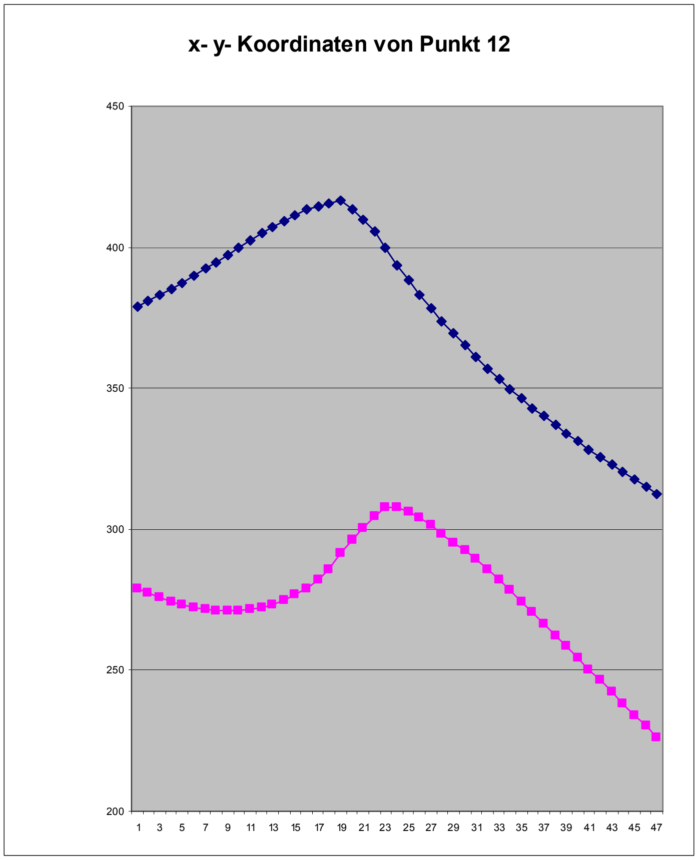
Das heißt, dass nahe Vorbeiflüge von Einzelmassen, so stark gedämpft werden, dass sie praktisch nicht mehr ins Gewicht fallen. Man kann aber jederzeit die Bewegung der Massen stoppen und die Einzelmassen anklicken und dann wird die tatsächliche, momentane Kräftesituation optisch angezeigt. Die angezeigte numerische Geschwindigkeit wird nach dem ersten Rechenstepp festgelegt (aus der Beschleunigung berechnet) und ist dann nicht mehr veränderbar.
Der Grund für diese Festlegung liegt in der geringen Anzahl der Massen im Modell.
Ohne eine entsprechende Dämpfung würden die wenigen Massen des Modells innerhalb kürzester Zeit ihre Umlaufbahnen verlassen. (Wie das bei Anklicken der Einzelmassen die momentane Kräftesumme auch deutlich macht.)

Wird ohne Dämpfung gerechnet, dann schwanken die Umlaufgeschwindigkeiten der Einzelmassen nach jeder engen Massenbegegnung erheblich und verlassen mitunter das System undefiniert. Eine Geschwindigkeitsgrafik über die Zeit (für die Masse 12 als Beispiel) zeigt dies deutlich.



Grafik 1

Man sieht die zunächst konstante Geschwindigkeit von 230 000 m/sek. (230km/sek.) Von 1. bis zum 13. Rechenstepp. (Diese Umlaufgeschwindigkeit wird bei einer unendlich großen Einzelmassen Anzahl in der galaktischen Fläche beibehalten)
Ohne eine Dämpfung wird aber die Masse schon bald von einer anderen nahen Masse allmählich aus ihrer Bahn gezogen.
Nach einer engen Begegnung mit dieser Einzelmasse (nur 61 Massen sind im Modell vorhanden) wird die Masse 12 beschleunigt und verlässt das System, wie das in der folgenden Grafik an den x- y-Werten dargestellt wird.
Die Berechnung der Geschwindigkeiten und Ortskoordinaten, für jede Masse im System, erfolgte sowohl im dynamischen Modell, als auch parallel und unabhängig dazu in einer Exceltabelle.
Es wurde so einerseits sichergestellt, dass sich keine Fehler einschleichen und zum anderen können die Wertereihen anschaulich grafisch dargestellt werden.

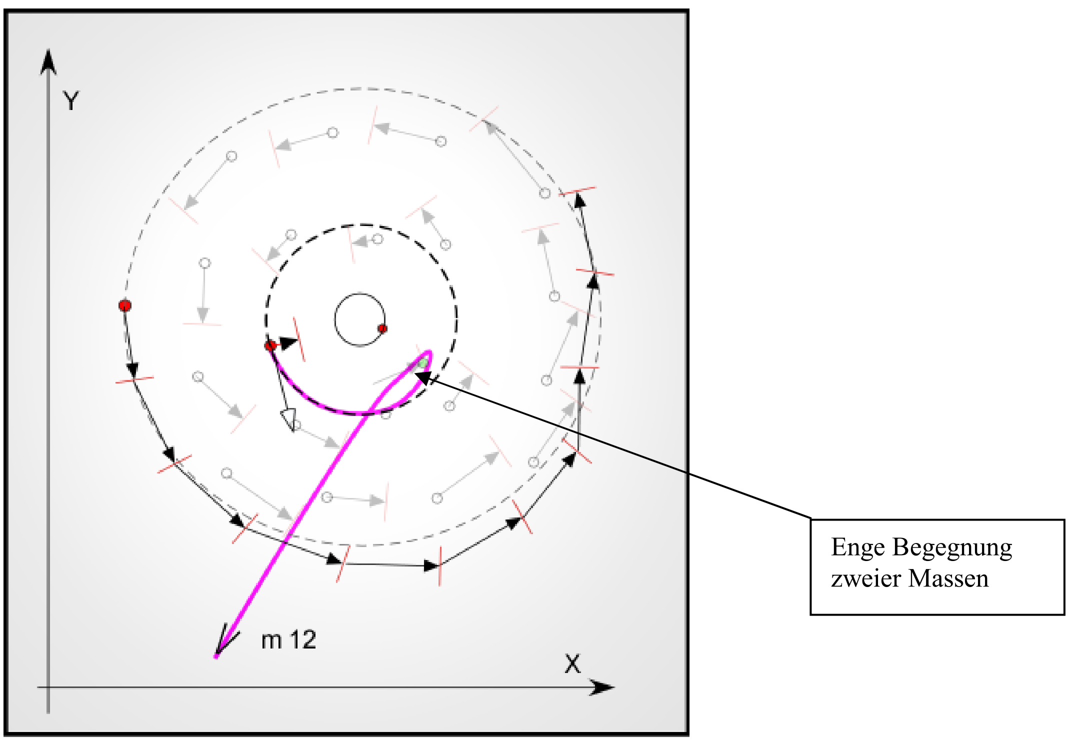


Grafik 2

Hier werden für die Masse 12 die x- und die y Koordinaten gezeigt. Zunächst entsprechen die Koordinaten einer Sinus Funktion, wie das bei einer Kreisbahn erwartet werden darf. (X- und y Werte sind um 90° Phasen verschoben)

Nach der Beschleunigung durch eine nahe Begegnung mit einer weiteren Einzelmasse verlässt die Masse 12 das System, was durch das Verlassen der anfänglichen Sinuskurve verdeutlicht wird.

Trägt man die Werte der beiden Ortskoordinaten in eine Grafik ein, so erscheint die Wegstrecke der Masse als eine Kurve, an der die enge Begegnung der Massen deutlich wird. In der unten anschließenden Grafik 3 wird der Weg der Masse 12 als violette Bahn, die nach der engen Begegnung der beiden Einzelmassen aus dem System führt, dargestellt.
Baut man eine starke Dämpfung in die Berechnung mit ein, dann bleibt die Masse 12 auf einer Kreisbahn. (hier gezeigt durch den gestrichelten Kreis) Auf der Außenbahn ist eine mittlere Dämpfung der Kräftedifferenzen durch die nicht ganz „runde“ Pfeilfolge eingezeichnet.



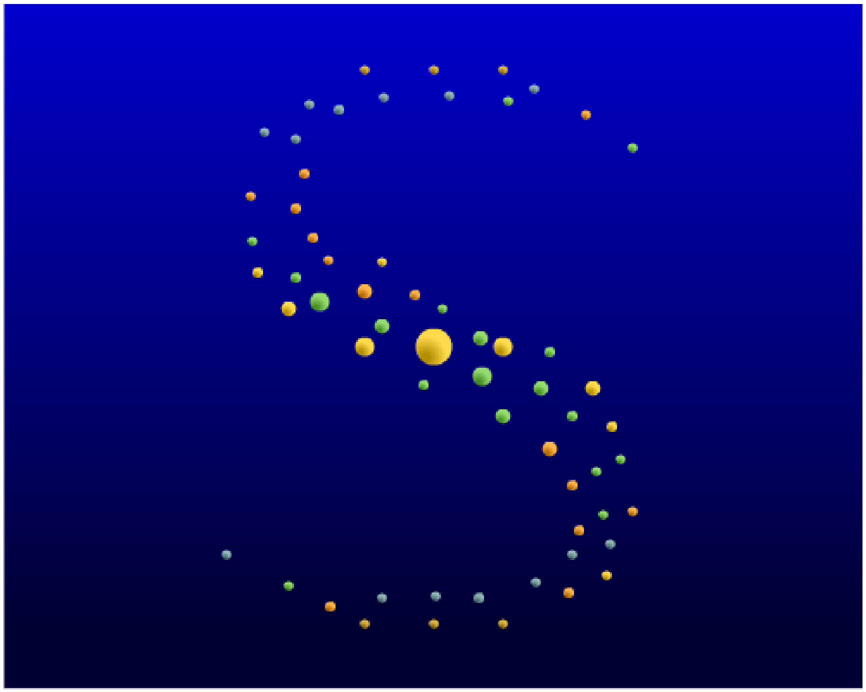
Grafik3

Aus den oben genannten Gründen ist es für ein Simulationsmodell mit nur wenigen Massen sinnvoll, eine entsprechend starke Dämpfung einzubauen, um für eine große konzentrische Massenansammlung zu vernünftigen Umlaufwerten zu kommen.

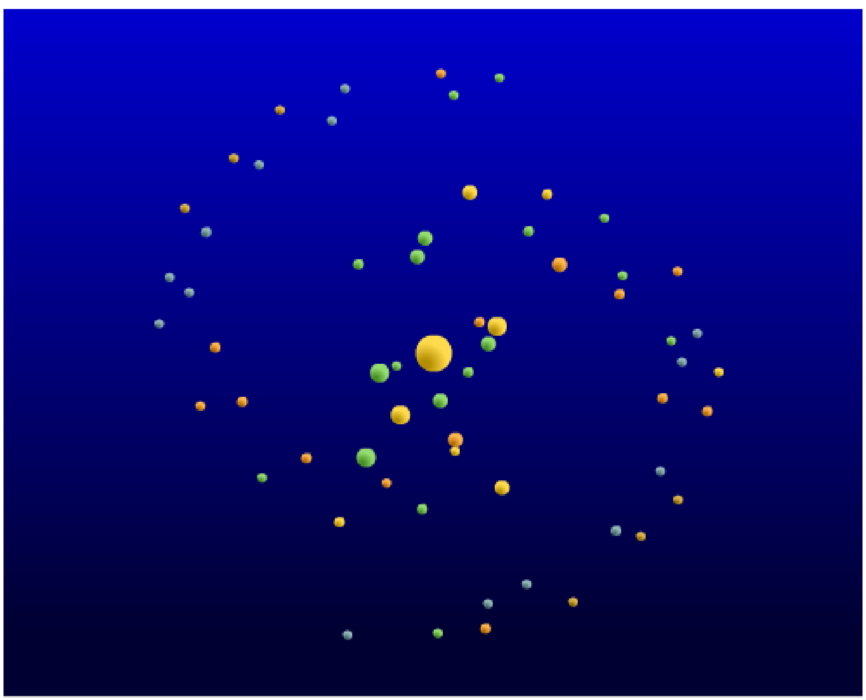
Das Modell kann vom Benutzer auch nach eigenen Vorstellungen umgestaltet werden.

Man kann die Einzelmassen verschieben und so z.B. eine Wagenradgalaxie oder eine Spiralgalaxie aufbauen. Auch ist es möglich, die Massen selbst in ihrer Größe zu variieren. Die Kräfte werden in jedem Fall nach jedem Stepp und nach der Vorgabe für jede Einzelmasse neu berechnet.

Ein Beispiel für eine Galaxie mit zwei starken Spiralarmen :



Bereits nach einer halben Umdrehung fangen die Spiralarme an sich zu verwischen.



Galaktische Massenfläche
Als vorgegebenes Beispiel in der dynamischen Simulation ist eine Massenverteilung in der galaktischen Fläche installiert, die zu einer Geschwindigkeitsverteilung in der galaktischen Fläche

führt, wie sie bei der Galaxie NGC 4378 gemessen wurde. (Durch Anklicken der Einzelmassen kann man sich das Geschwindigkeitsprofil anzeigen lassen.)

Aufbau und Funktionsweise des Dynamischen Modells

1. Festlegen der Einzelmassenanzahl (z. B. 357 Stk.) *Mengenfestlegung der Einzelmassen*

2. Festlegen der Massenanordnung
Varianten: Gerastert im quadratischen Gitter mit homogener Verteilung oder galaktische Verteilung oder kreisförmig in Einzelringen oder als Keplerbahnen oder irregulär
Verteilungsfestlegung der Einzelmassen

3. Festlegen der x/y Koordinaten der Einzelnen Massepunkte (Ausgangspunkte)*Ortsfestlegung einer jeden Einzelmasse*

4. Festlegen der Einzelmassengröße
Entweder durch das Festlegen der Gesamtmassengröße mit anschließender Aufteilung durch die Anzahl der Einzelmassen.(es gibt dann nur eine Durchschnittsmasse)
Oder aber durch die Größenfestlegung einer jeden Einzelmasse. (sehr aufwendig oder als Modell vorgeben)

Sinnvoll erscheint eine Kombination der beiden Festlegungsmodalitäten.
Es wird eine Durchschnittsmasse vorgegeben, die aber in bestimmten Kreisringen oder einzeln modifiziert werden kann.

5. Festlegen des durchschnittlichen Abstands der Einzelmassen zueinander (Skalierung des x/y Rasters)

6. Festlegen des Zeitintervalls, nach dem eine Neuberechnung durchgeführt werden soll.

7. Berechnung der Anziehungskraft zwischen den einzelnen Massen Es wird die Anziehungskraft aller Einzelmassen auf eine jede andere Einzelmasse berechnet. Die jeweilige Kraft ist in x- und y- Werte aufgeteilt, so dass die Richtung und die Größe der Kraft festliegt und stets ablesbar ist. (Vektor) In der Animation sieht man eine Vielzahl von feinen Linien (Vektoren), die auf den jeweiligen Massepunkt hinweisen

$F_{X1} = \frac{\gamma \cdot m_1 \cdot m_2}{X1^2}$ **(F1)** wobei x jedes Mal aus der Differenz der beiden x-Koordinaten der jeweils betrachteten Massen m1 und m2 (m1 und m3 , usw.) errechnet wird
$X1 = x_1 - x_2$ ($X1\text{-}3 = x_1 - x_3$)

Führt man das für x näher aus, so sollte die Formel folgendermaßen aussehen:

$$F_{X1} = \frac{\left(\gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(x_2 - x_1\right) \cdot pix\right)}{\left(\left(\left(\sqrt{n} \cdot pix\right) \cdot \left(\sqrt{n} \cdot pix\right) \cdot \sqrt{n}\right) \cdot pix\right)} \qquad \textbf{(F1.1)}$$

Diesen Wurzelwert in F1.1 einfügen $\sqrt{n} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

$$F_{Y1} = \frac{\gamma \cdot m_1 \cdot m_2}{Y1^2}$$ **(F2)** wobei y jedes Mal aus der Differenz der beiden y-Koordinaten der jeweils betrachteten Massen m1 und m2 (m1 und m3 , usw.) errechnet wird.

Führt man das für y näher aus, so sollte die Formel folgendermaßen aussehen:

$$F_{y1} = \frac{(\gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot (y_2 - y_1\ ) \cdot pix)}{(((\sqrt{n \cdot pix}) \cdot (\sqrt{n \cdot pix}) \cdot \sqrt{n}) \cdot pix)} \qquad \textbf{(F2.1)}$$

Diesen Wurzelwert in F2.1 einfügen $\sqrt{n} = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

8. Die Einzelkräfte der x- und jeweils auch der y-Werte werden für jede betrachtete Masse addiert. Dadurch erhält man einen Gesamtbetrag für x und einen Gesamtbetrag für y, der in Größe und Richtung alle auf eine Masse wirkenden Kräfte zusammenfasst. Diese Summenkräfte von x und y lassen sich in einer trigonometrischen Funktion zusammenfassen.

$$F_{m1gesamt} = \sqrt{x_{1ges}^2 + y_{1ges}^2} \qquad \textbf{(F3)}$$

In der Animation sieht man nun nur eine Kraftlinie (Vektor), die von dem jeweiligen Massepunkt wegweist (die Anziehungskraft aller Einzelmassen auf diese eine Masse darstellt)
Berechnet wird also zunächst nur die Massenbeschleunigung einer jeden Einzelmasse.

Beschleunigung

$$a_{m1x} = \frac{\left(\left(\frac{F_x}{m_1}\right) \cdot t^2\right)}{2} \qquad \textbf{(F4)}$$

$$a_{m1y} = \frac{\left(\left(\frac{F_y}{m_1}\right) \cdot t^2\right)}{2} \qquad \textbf{(F5)}$$

$$a_{m1gesamt} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad \textbf{(F6)}$$

Würde man nun die Einzelmassen durch die jeweils errechnete Kraft sich im dynamischen Modell beschleunigen lassen, so würden sich irgendwann alle Massen in einem

gemeinsamen Zentrum treffen.
Damit sich die Einzelmassen auf einer Kreisbahn bewegen und nicht nur ins Zentrum stürzen, ist es nötig, den Massen eine bestimmte, orthogonal zur Beschleunigung, konstante Geschwindigkeit als Startbedingung mitzugeben.

9. *Der konstante Anteil der Geschwindigkeit* errechnet sich hierbei aus dem beschleunigten Geschwindigkeitsanteil über die Kräfteparallelogramm-Methode mit den Basiswerten der Zeitdauer und der Entfernung zum Mittelpunkt aller konzentrisch verteilten Massen

$$v_{m1x} = \sqrt{r_{vis}^{2} - (r_{vis} - a_x)^2}$$ **(F7)** Für y gilt die Formel entsprechend.

Für r gilt die folgende Formel (zum Einfügen in F7) $$r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

(F7.1)

Die Beschleunigung **a** und die konstante Geschwindigkeit **v** $_{\mathbf{kon.}}$ Sind in ihrer Wirkrichtung stets orthogonal zueinander

Für P1 gilt dann für die Richtungsangabe:

Beschleunigung a	In Richtung auf Zentrum (x0 /y0)		Orthogonal dazu wird aus Δy neu dann Δx und umgekehrt
Y1-y0=Δy	Δy * (-1)= Δy neu	umschreiben →	Δx * (+1)
X1-x0=Δx	Δx * (-1)= Δx neu	umschreiben →	Δy * (-1)

Der Betrag wird dann der Richtung aufgeprägt.

(Der gleiche Wert lässt sich auch über eine Tangensfunktion bestimmen)

$$v_{m1kon.gesamt} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$ **(F8)**

So setzt sich die Gesamtgeschwindigkeit einer jeden Einzelmasse stets aus einem beschleunigten und einer konstanten Anteil zusammen. Beide Vektoren stehen bei einer Kreisbahn rechtwinklig zueinander. Beide Werte können sich nach jedem Berechnungszyklus verändern.

$$v_{m1gesamt} = \sqrt{v_{kon.ges.}^2 + a_{ges}^2}$$ **(F9)**

Bei einer gegen unendlich gehenden Einzelmassenmenge im Gesamtsystem, wie das bei einer Galaxis ja der Fall ist, werden sich die Werte nur äußerst geringfügig ändern, da die Einzelmassen letztlich verschwindend gering gegenüber die Gesamtmasse ausfallen, und somit fast keine Störungen und Bahnablenkungen eintreten können.
Sind hingegen nur wenige Einzelmassen im System, so werden die Kreisbahnen schon nach relativ kurzer Zeit verlassen, da jede Masse von benachbarten Einzelmassen stark

beeinflusst werden könnte.
Um nun die Bewegung der Einzelmassen in einer Galaxie durch relativ wenige Einzelmassen (einige Hundert) zu realisieren, ist es nötig einen gewissen Dämpfungsfaktor, der von der Kreisbahn abweichenden Änderungen, festzulegen. Damit bleiben die Einzelmassen recht lange auf ihren Kreisbahnen.

$$a_{m1ges} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \text{ bei } t_o \qquad \textbf{(F10)}$$

Nach dem nächsten Rechenschritt wird der neue Wert der Beschleunigung mit dem zuvor errechneten Wert verglichen und die Differenz um einen bestimmten Faktor reduziert.

$$a_{m1ges.neu} = a_{alt} + (a_{neu} - a_{alt}) \cdot Faktor \qquad \textbf{(F11)}$$

Der Faktor $_{\text{Dämpfung}}$ könnte z.B. 0,3 oder kleiner betragen

Das Verhältnis a zu $v_{ges.konst}$. drückt auch den Tangens des Winkels aus, um den die Masse auf ihrer Kreisbahn abgelenkt wird. Dieser Winkel ist bei der nächsten Berechnung für die Richtungsangabe zu verdoppeln, da sich die Masse ja stets tangential auf der Kreisbahn bewegt. (siehe Grafik unten) Statt einer Winkelverdopplung im Stepp t_1 kann man auch die Strecke t_0 - t_1, unter Beibehaltung des zuvor errechneten Winkels, halbieren. Auch so wird erreicht, dass die Geschwindigkeit stets tangential zum Kreisbogen bleibt. Tut man das nicht, handelt man sich einen Fehler ein und die betrachtete Masse wird nach jeder Berechnung weiter nach außen driften. [1]

Die Gesamtgeschwindigkeit v_{ges} muss nun im Punkt t_1 rückgerechnet werden auf $v_{kon.\ neu}$
Dies geschieht mit der Formel

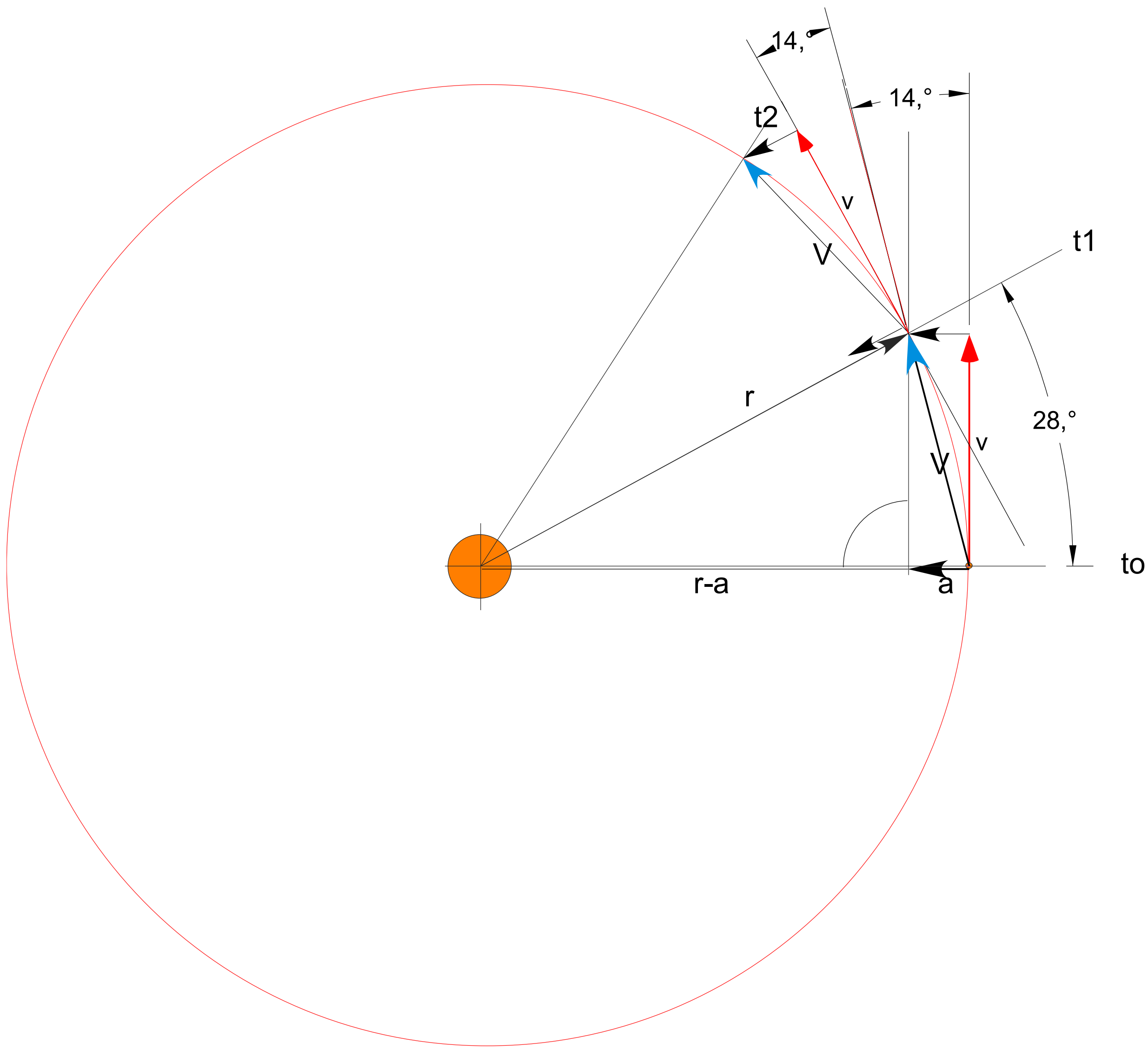
$$v_{kon.neu} = \sqrt{v_{ges.}^2 - a_{ges.alt.}^2} \quad \text{für Punkt } t_1 \qquad \textbf{(F12)}$$

Die Berechnung der neuen Gesamtgeschwindigkeit erfolgt mit der Formel

$$v_{m1ges.neu} = \sqrt{v_{kon.neu.}^2 + a_{ges.neu}^2} \qquad \textbf{(F13)}$$

---

1 Die Verdopplung des Winkels oder aber die Halbierung der Strecke v ges. entspricht dem so genannten „ Midpoint Extrapolationsverfahren“ Es handelt sich dabei um ein sehr komplexes Verfahren, das für Langzeitberechnungen eingesetzt wird. Es wird jeder Zeitschritt mehrmals gerechnet, einmal
ganz, dann den halben Zeitschritt, dann ein Drittel usw. und aus den Differenzen der Ergebnisse kann dann eine Fehlerkorrektur bestimmt werden.
Für eine Galaxie reichen hingegen wenige Umläufe, denn es ist nicht erforderlich mehrere Tausend Umlaufe zu simulieren.


14,°
14,°
t2
v
V
t1
r
28,°
V
v
r-a
a
to